Metoda residuów

Niech transformata sygnały *y(t)* będzie funkcją wymierną

$$Y(s)=\frac{L(s)}{M(s)}$$

1. Jeżeli wszystkie bieguny są pojedyncze i rzeczywiste, to:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-s_i}\right\}=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{s_i t}$$

$$C_i=\underset{s=s_i}{res}\frac{L(s)}{M(s)}=\lim_{s\to s_i}\left[\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_i)\right]$$

2. Jeżeli bieguny są pojedyncze, ale w tym *l* jest rzeczywistych oraz *2p* zespolonych (tzn. *p* par pierwiastków sprzężonych) $n = l + 2p$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{l}C_i e^{s_i t}+2\operatorname{Re}\left[\sum_{k=1}^{p}C_k e^{s_k t}\right]$$ $\operatorname{Re}[\cdot]$ - oznacza część rzeczywista liczby zespolonej

$C_k$ – oblicza się jak w pkt. 1

3. Wielokrotne bieguny rzeczywiste

*h* – ilość różnych pierwiastków

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$ – krotności tych pierwiastków $\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_h=n$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{h}\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i}\frac{C_{ik}}{(k-1)!}\cdot t^{k-1}\right)\cdot e^{s_i t}$$ *k* – po ilości pierwiastka, *i* – po różnych pierwiastkach

$$C_{ik}=\frac{1}{(\gamma_i-k)!}\lim_{s\to s_i}\frac{d^{\gamma_i-k}}{ds^{\gamma_i-k}}\left[\frac{L(s)}{M(s)}(s-s_i)^{\gamma_i}\right]$$

4. Wielokrotne bieguny rzeczywiste i urojone

$$y(t)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i}\frac{C_{ik}}{(k-1)!}\cdot t^{k-1}\right)\cdot e^{s_i t}+2\operatorname{Re}\left[\sum_{g=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{\lambda_g}\frac{C_{gl}}{(l-1)!}\cdot t^{l-1}\right)\cdot e^{s_g t}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_i+2\sum_{g=1}^{q}\lambda_g=n$$

$C_{gl}$ tak jak $C_{ik}$

PRZYKŁADY

Wyznaczyć oryginał dla transformaty $Y(s)=\dfrac{1}{(Ts+1)^3}$ (zastosowanie wzoru 28+

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(Ts+1)^3}\right\}=\frac{1}{T^3}L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^3}\right\}=\frac{1}{T^3}e^{-\frac{t}{T}}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{1}{T^3}e^{-\frac{t}{T}}\frac{t^2}{2}$$

Znaleźć transformatę odwrotną wyrażenia : $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}-\dfrac{20}{(s+1)^2(s+3)^3}$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-20L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s+3)^3}\right\}$$

obliczenie $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2(s+3)^3}\right\}$ metodą residuów

*h = 2* - ilość różnych pierwiastków

$\gamma_1 = 2$ - krotność pierwiastka $s_1 = -1$

$\gamma_2 = 3$ - krotność pierwiastka $s_2 = -3$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+3)^3}=\frac{C_{11}}{s+1}+\frac{C_{12}}{(s+1)^2}+\frac{C_{21}}{s+3}+\frac{C_{22}}{(s+3)^2}+\frac{C_{32}}{(s+3)^3}$$

$$C_{12}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+3)^3}\cdot(s+1)^2\right)=\frac{1}{0!}\lim_{s\to-1}\left(\frac{1}{(s+3)^3}\right)=\frac{1}{(-1+3)^3}=\frac{1}{8}$$

$$C_{11}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+3)^3}\right)=\lim_{s\to-1}-3(s+3)^{-4}=-\frac{3}{16}$$

$$C_{23}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to-3}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+3)^3}\cdot(s+3)^3\right)=\frac{1}{0!}\lim_{s\to-3}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=\frac{1}{(-3+1)^2}=\frac{1}{4}$$

$$C_{22}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to-3}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=\lim_{s\to-3}-2(s+1)^{-3}=\frac{1}{4}$$

$$C_{21}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to-3}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-3}\frac{d}{ds}\left(-2(s+1)^{-3}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-3}6(s+1)^{-4}=\frac{6}{2\cdot16}=\frac{3}{16}$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-20\left(L^{-1}\left\{\frac{-\frac{3}{16}}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{8}}{(s+1)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{16}}{s+3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{(s+3)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{(s+3)^3}\right\}\right)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+\tfrac{15}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\tfrac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}-\tfrac{15}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-5L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}-5L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\}$$

korzystając ze wzoru 28 otrzymuje się

$$L^{-1}\{F(s)\}=t\cdot e^{-t}+\tfrac{15}{4}e^{-t}-\tfrac{5}{2}t\cdot e^{-t}-\tfrac{15}{4}e^{-3t}-5t\cdot e^{-3t}-5\tfrac{t^2}{2}\cdot e^{-3t}$$

$$f(t)=\left(\tfrac{15}{4}-\tfrac{3}{2}t\right)\cdot e^{-t}-\left(\tfrac{15}{4}-5t-\tfrac{5}{2}t^2\right)\cdot e^{-3t}$$