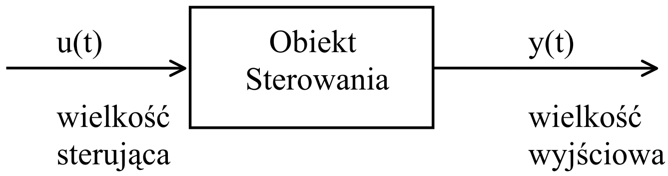
Autor : dr inż. Wiktor Bolek

1. Modele matematyczne obiektów liniowych



Obiekt dynamiczny jest to taki obiekt, którego wyjście y(t) zależy nie tylko od bieżącej wartości sygnału sterującego u(t), ale także od historii sterowania czy inaczej mówiąc, od stanu wewnętrznego.

Obiekt dynamiczny dokonuje na sygnale sterującym pewnej transformacji :

$y(t) = A\ \{ u(t) \}$.

Obiekt nazywamy liniowym, jeżeli transformacja A spełnia zasadę superpozycji :

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\mathbf{R}} \bigwedge_{u_1,u_2\in\mathbf{L}^2} A\{\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)\} = \alpha A\{u_1(t)\}+\beta A\{u_2(t)\}$$

Transformację A można opisać na trzy różne sposoby:

- równanie różniczkowe

$$y^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1} p_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i u^{(i)}(t),$$

warunki początkowe : $y^{(i)}(0) = y_i$, dla $i = 0,1,...,n-1$.

- transmitancję

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i} \text{ ; zerowe warunki początkowe}$$

- równanie stanu

Wektor stanu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ - opisuje stan obiektu w każdej chwili t.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t)$$

Wymiary macierzy dla obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu (single input single output SISO), są następujące : **A** [n x n] - macierz układu, **b** [1 x n] - macierz (wektor) wejść, **c** [n x 1] - macierz (wektor) wyjść, d - skalar (macierz transmisyjna). Warunki początkowe

$$\mathbf{x}^T(0) = [x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}]$$

Uwaga :

Człon proporcjonalny jest opisany jako *y(t) = d u(t)*, pozostałe macierze : **A,b,c** są równe zero. W myśl definicji ten człon nie jest obiektem dynamicznym. Wyjście zależy tylko od bieżących wartości na wejściu.

Opis obiektu przy pomocy wektora stanu czy równania różniczkowego jest ogólniejszy, gdyż dopuszcza dowolne warunki początkowe.

2. Własności dynamiczne

Własności dynamiczne obiektów liniowych są określone przez położenie pierwiastków równania charakterystycznego $\psi(s) = 0$.

Równanie charakterystyczne ma postać :

$$\psi(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i \quad \text{- czyli mianownik transmitancji}$$

Jeżeli obiekt jest opisany równaniem stanu, to

$$\psi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są jednocześnie wartościami własnymi macierzy **A**. Obydwa przedstawione powyżej sformułowania są sobie równoważne.

Jedną z najważniejszych własności dynamicznych jest stabilność. Pod tym pojęciem będziemy rozumieli zdolność obiektu do samodzielnego powracania do punktu równowagi. Rozważmy układ autonomiczny (tzn. nie poddany zewnętrznym wymuszeniom). Jest on opisany następującym równaniem :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Punktami równowagi takiego układu są wszystkie punkty przestrzeni fazowej $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, dla których zmiany położenia mogą być zerowe, czyli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}\text{, co daje} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to istnieje tylko jeden punkt równowagi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, gdyż wtedy to równanie ma tylko jedno rozwiązanie. Gdy $\det \mathbf{A} = 0$, to układ ma nieskończenie wiele punktów równowagi.

Zakładamy, że w chwili początkowej układ został wytrącony z punktu równowagi , czyli $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \neq 0$.

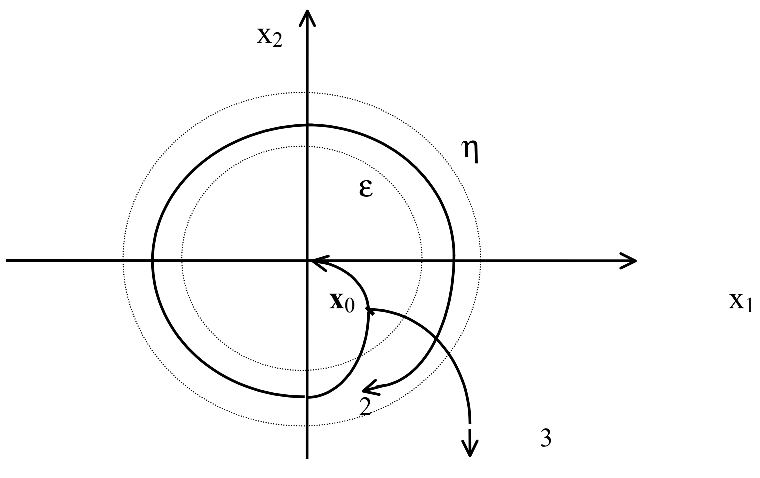
Obiekt nazywamy stabilnym, jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ istnieje takie $\eta>0$, że jeżeli punkt początkowy $\mathbf{x}_0$ znajduje się w kuli o promieniu ε, to trajektoria obiektu $x(t)$ pozostanie w kuli o promieniu η.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\eta>0} \left\|\mathbf{x}_0\right\| < \varepsilon \Rightarrow \left\|\mathbf{x}(t)\right\| < \eta$$

Obiekt nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli

$$\bigwedge_{\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n} \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Stabilność w małym otoczeniu punktu równowagi nazywać będziemy stabilnością lokalną, a stabilność przy dowolnie dużych warunkach początkowych - stabilnością globalną. Zwykle od układów sterowania wymaga się globalnej stabilności asymptotycznej.



1- obiekt stabilny asymptotycznie, 2- stabilny, ale nieasymptotycznie, 3- niestabilny

Warunki konieczne i dostateczne stabilności

Obiekt jest stabilny asymptotycznie, gdy pierwiastki równania charakterystycznego (wartości własne macierzy **A**) mają ujemne części rzeczywiste.

Obiekt jest na granicy stabilności, jeżeli nie ma wartości własnych o dodatnich częściach rzeczywistych oraz wszystkie wartości własne o zerowych częściach rzeczywistych są jednokrotnymi pierwiastkami wielomianu charakterystycznego.

Obiekt jest niestabilny, gdy posiada co najmniej jeden pierwiastek o dodatniej części rzeczywistej.

Sposoby przejścia między różnymi opisami

Opis obiektu w przestrzeni stanów nie jest jednoznaczny, tj. różne zestawy macierzy **A, b, c** mogą opisywać obiekt o tych samych własnościach. Powstaje pytanie jak wybrać wektor stanu mając opis obiektu w postaci transmitancji. Istnieje kilka standardowych sposobów przejścia, które pozwalają na uzyskanie tzw. kanonicznych postaci macierzy **A, b, c** (metoda bezpośrednia, równoległa, iteracyjna). Weźmy obiekt opisany transmitancją :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r_{n-1}s^{n-1} + \ldots + r_1 s + r_0}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0} \quad \begin{array}{l} /\cdot s^{-n} \\ /\cdot s^{-n} \end{array}$$

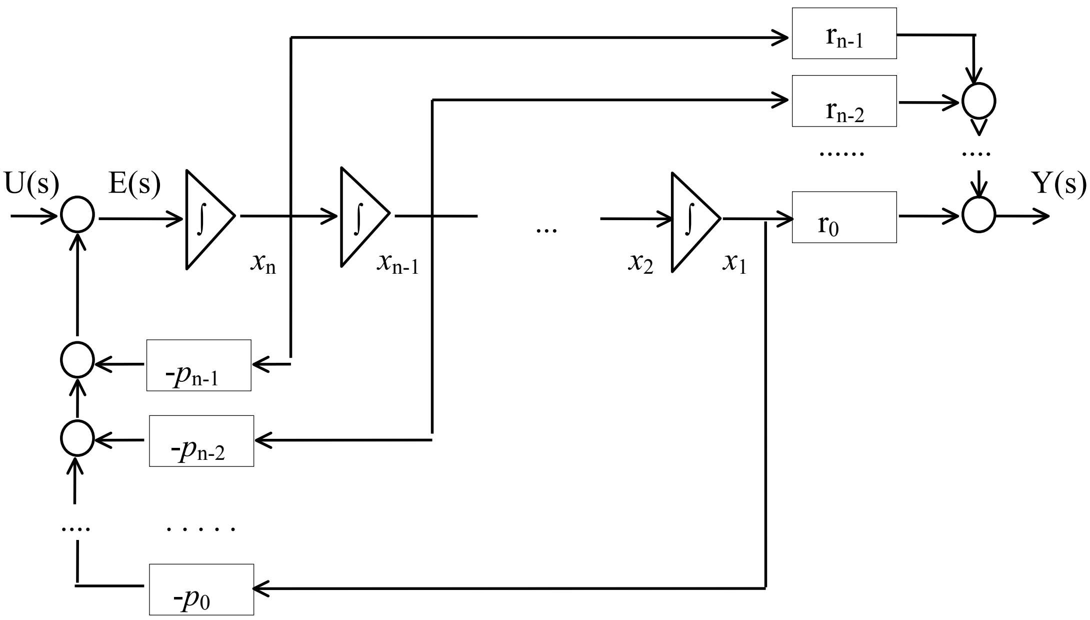
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r_{n-1}s^{-1} + \ldots + r_1 s^{1-n} + r_0 s^{-n}}{1 + p_{n-1}s^{-1} + \ldots + p_1 s^{1-n} + p_0 s^{-n}}$$

$$Y(s) = \left(r_{n-1}s^{-1} + \ldots + r_1 s^{1-n} + r_0 s^{-n}\right) \cdot E(s)\text{, gdzie}$$

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + p_{n-1}s^{-1} + \ldots + p_1 s^{1-n} + p_0 s^{-n}}\text{, czyli}$$

$$E(s) = U(s) - \left(p_{n-1}s^{-1} + \ldots + p_1 s^{1-n} + p_0 s^{-n}\right) \cdot E(s).$$

Rysujemy schemat blokowy wewnętrznej struktury obiektu pamiętając, że mnożenie przez s^{-1} oznacza całkowanie.



Na poszczególne zmienne stanu $x_i\,(t)$ wybieramy wielkości :

$$X_i(s) = \frac{E(s)}{s^{n-i+1}}$$

Po przejściu do dziedziny czasu otrzymuje się układ równań różniczkowych :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -p_0 x_1(t) - p_1 x_2(t) - \dots - p_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

równanie wyjścia :

$$y(t) = r_0 x_1(t) + r_1 x_2(t) + \dots + r_{n-1} x_n(t)$$

Wykorzystując zapis macierzowy :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-2} & r_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

W ten sposób otrzymaliśmy jedną z postaci kanonicznych Brunowsky'ego - Luenbergera macierzy **A, b, c**. Jest to tzw. postać kanoniczna dla sterowania. Stosując inny tok postępowania można otrzymać tzw. postać kanoniczną dla obserwowania.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -p_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix} ; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_{n-2} \\ r_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przejście odwrotne, tzn. z opisu przestrzeni stanów do transmitancji wykonuje się następująco :

$$Y(s) = \mathbf{c} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{b} \cdot U(s) - \mathbf{x}_0) + d \cdot U(s)$$

Przejście pomiędzy równaniem różniczkowym a transmitancją wykonuje się za pomocą przekształcenia Laplace'a.