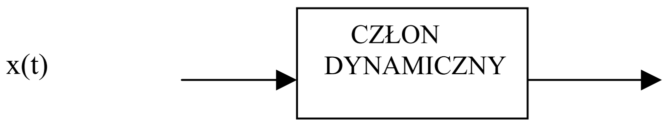
PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMICZNE

Człon podstawowy jest to element przetwarzający wprowadzony do niego sygnał wejściowy x(t) na sygnał wyjściowy y(t) w sposób elementarny. Przetwarzanie elementarne oznacza, między innymi, realizację podstawowych funkcji matematycznych, takich jak: mnożenie przez stały współczynnik, różniczkowanie, całkowanie.

Każdy układ automatycznej regulacji UAR można przedstawić jako połączenie członów podstawowych. Takie przedstawienie UAR ułatwia jego analizę i syntezę.



Rys.1.1.Schemat członu podstawowego

1.1.Rodzaje członów podstawowych i ich właściwości dynamiczne

Właściwości dynamiczne każdego obiektu można opisać za pomocą równań bilansu substancji i energii. Związki te wiążą sygnał wejściowy x(t) z sygnałem wyjściowym y(t) i mają najczęściej postać równania różniczkowego zwyczajnego liniowego. W przypadku równań nieliniowych przeprowadza się ich linearyzację. Równania różniczkowe stanowią pierwotny opis właściwości dynamicznych obiektów i mogą być podstawą ich podziału. Wyróżnia się następujące człony podstawowe:

1 - proporcjonalny,
2 - inercyjny I rzędu,
3 - różniczkujący,
4 - całkujący,
5 - oscylacyjny,
6 - opóźniający.

Z równania różniczkowego można uzyskać inne rodzaje opisu właściwości dynamicznych, np. transmitancje operatorowe i odpowiedzi skokowe.

Transmitancja operatorowa jest to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego, przy zerowych warunkach początkowych

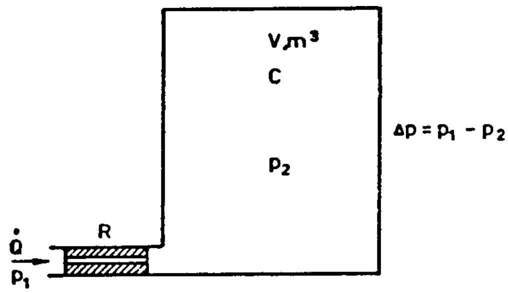
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

gdzie: Y(s) = L{y(t)} – transformata Laplace'a sygnału wyjściowego,
X(s) = L{x(t)} – transformata Laplace'a sygnału wejściowego.

Odpowiedź skokowa jest to przebieg zmian sygnału wyjściowego y(t) pod wpływem wymuszenia skokowego x(t) = **1**(t)Δx (Δx – amplituda skoku), gdzie **1**(t) – funkcja skoku jednostkowego

$$1(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t < 0 \\ 1 & dla \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Sposób uzyskiwania równań różniczkowych, transmitancji i odpowiedzi skokowych przedstawiono na przykładzie obiektu, którym jest zbiornik gazu napełniany poprzez przewód z przewężeniem (opór). Sygnałem wejściowym jest ciśnienie gazu p_1 na wlocie do zbiornika, a wyjściowym ciśnienie p_2 w zbiorniku. Strumień przepływającego gazu jest proporcjonalny do różnicy ciśnień przed i za zaworem.



Rys.1.2.Schemat zbiornika gazu: C – pojemność pneumatyczna, p_1,p_2 – ciśnienie, $\dot{Q}$– strumień powietrza, R – oporność pneumatyczna, V – objętość

W celu uzyskania równań opisujących właściwości dynamiczne zbiornika należy skorzystać z definicji oporności pneumatycznej R i pojemności pneumatycznej C, tj. następujących zależności:

$$R = \frac{\Delta p}{\dot{Q}} \tag{1}$$

$$C = \frac{\dot{Q}}{\frac{dp_2}{dt}} \tag{2}$$

gdzie: Δp – spadek ciśnienia na oporze, Pa,
p – ciśnienie w zbiorniku, Pa,
$\dot{Q}$ - strumień masy gazu, kg s^{-1},
R – oporność pneumatyczna, $m^{-1}s^{-1}$,
C – pojemność pneumatyczna, ms^2

Po uwzględnieniu wielkości występujących w analizowanym przykładzie, wzory (1) i (2) można napisać w postaci:

$$\dot{Q} = \frac{p_1 - p_2}{R} \tag{3}$$

$$\dot{Q} = C\frac{dp_2}{dt} \tag{4}$$

a po porównaniu wzorów (3) i (4) jako

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = C\frac{dp_2}{dt}$$

Jeśli przyjmie się, że T = RC, to powyższe równanie można przedstawić następująco:

$$T\frac{dp_2}{dt} + p_2 = p_1 \tag{5}$$

Stała T ma wymiar czasu.

Zależność (5) stanowi równanie różniczkowe opisujące właściwości członu inercyjnego I rzędu o stałej czasowej T i współczynniku wzmocnienia k = 1. Zbiornik gazu ma więc właściwości charakterystyczne dla tego członu.

W celu wyznaczenia transmitancji G(s) z równania różniczkowego (5) należy do wzoru zastosować przekształcenie Laplace'a i przyjąć warunki początkowe zerowe

$$TsP_2(s) + P_2(s) = P_1(s) \qquad (6)$$

Po uporządkowaniu równania (6) uzyskuje się szukaną transmitancję

$$G(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = \frac{1}{Ts+1} \qquad (7)$$

Na podstawie transmitancji i transformaty sygnału wejściowego można uzyskać transformatę sygnału wyjściowego

$$P_2(s) = G(s)P_1(s) \qquad (8)$$

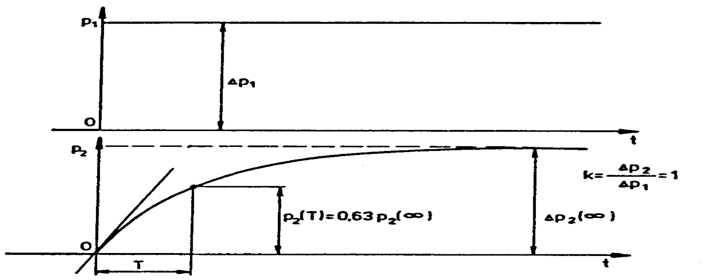
Jeżeli sygnał wejściowy jest skokiem o amplitudzie Δp, to transformatą takiego sygnału jest Δp/s. Z równania (8) uzyskuje się więc

$$P_2(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{\Delta p}{s} \qquad (9)$$

W celu wyznaczenia odpowiedzi skokowej $p_2(t)$ należy zastosować odwrotne przekształcenie Laplace'a do równania (9), czyli

$$p_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\Delta p}{(Ts+1)s}\right] = \Delta p L^{-1}\left[\frac{1}{s(Ts+1)}\right] = \Delta p\left[1 - \exp(-t/T)\right] \qquad (10)$$

Wykres $p_2(t)$ przedstawiono na rysunku 1.3.



Rys.1.3.Charakterystyka skokowa członu inercyjnego I rzędu

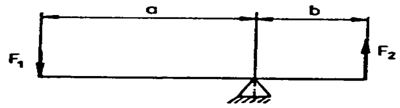
W celu wyznaczenia stałej czasowej T należy poprowadzić styczną do krzywej w punkcie t =0. Punkt przecięcia stycznej z wartością ustaloną $p_2(\infty)$ zrzutowany na oś czasu odcina na niej stałą czasową. Po upływie jednej stałej czasowej T odpowiedź osiąga 63% wartości ustalonej, po 3T – 95%, a po 5T – 99%.

Podobnie jak w przedstawionym przykładzie można wyznaczyć równania różniczkowe, transmitancje i odpowiedzi skokowe pozostałych członów podstawowych (Tabela 1.1).

1.2.Przykłady członów podstawowych

CZŁON PROPORCJONALNY

a) **Dźwignia dwuramienna –** rysunek 1.4



Rys.1.4.Schemat dźwigni dwuramiennej:
a, b – długości ramion, F_1,F_2 – siła

Na dźwignię działa siła F_1 przyłożona w odległości *a* od punktu podparcia, wywołując reakcję w postaci siły F_2 na drugim końcu dźwigni odległym o *b* od punktu podparcia. Przyjmując, że belka jest sztywna i nieważka można napisać równanie sił:

$$F_1 a = F_2 b$$

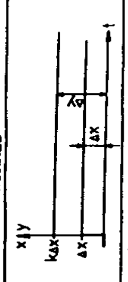
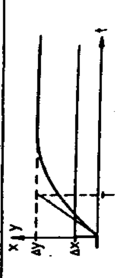
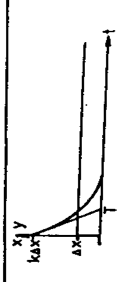
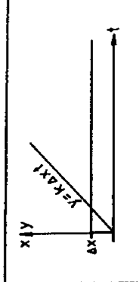
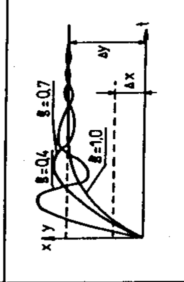
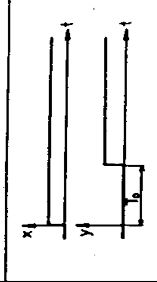
stąd

$$F_2 = \frac{a}{b} F_1$$

Transmitancję operatorową tego członu można wyznaczyć dla $k = a / b$

$$G(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)} = k.$$

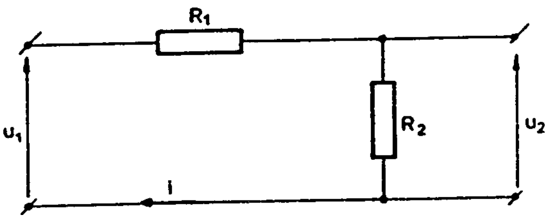
Tabela 1.1

NAZWA CZŁONU	RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE	TRANSMITANCJA G(s)	ODPOWIEDŹ SKOKOWA WZÓR	ODPOWIEDŹ SKOKOWA WYKRES
PROPORCJONALNY	$y(t) = kx(t)$	k	$y(t) = k\Delta x\, 1(t)$	
INERCYJNY I RZĘDU	$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Ts+1}$	$y(t) = k\Delta x\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right]$	
RÓŻNICZKUJĄCY RZECZYWISTY	$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Tk\frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{Tks}{Ts+1}$	$y(t) = k\Delta x \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	
CAŁKUJĄCY	$\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$ lub $y(t) = k\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{k}{s}$	$y(t) = k\Delta xt$	
OSCYLACYJNY	$T_2^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ $0 < \frac{T_1}{2} < T_2$	$\frac{k}{T_2^2s + T_1s + 1}$ lub $\frac{k}{T^2s + 2\xi Ts + 1}$ $T = T_2$ $\xi = \frac{T_1}{2T_2} < 1$	$y(t) = k\Delta x\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp\left(-\frac{\xi t}{T}\right)\cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\frac{t}{T} + \varphi\right)\right]$ $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	
OPÓŹNIAJĄCY	$y(t) = x(t - T_0)$	$\exp(-T_0 s)$	$y(t) = \Delta x\, 1(t - T_0)$	

b) **Czwórnik elektryczny** – rysunek 1.5

Po porównaniu wzorów określających natężenie prądu $i = U_2 / R_2$ oraz $i = (U_1 - U_2)/R_1$ uzyskuje się następującą zależność określającą właściwości czwórnika jako członu proporcjonalnego:

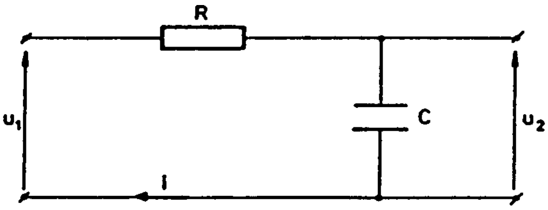
$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_1$$



Rys.1.5.Schemat czwórnika elektrycznego RR: R_1,R_2 – rezystancja, U_1,U_2 – napięcie, U_1 – sygnał wejściowy, U_2 – sygnał wyjściowy

CZŁON INERCYJNY I RZĘDU

a) **Czwórnik elektryczny RC**– rysunek 1.6



Rys.1.6.Schemat czwórnika elektrycznego RC: C – pojemność kondensatora, i – natężenie prądu, R – rezystancja, U_1,U_2 – napięcie, U_1 – sygnał wejściowy, U_2 – sygnał wyjściowy

Natężenie prądu przepływającego przez rezystor ma wartość

$$i = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

a prądu ładowania kondensatora

$$i = C\frac{dU_2}{dt}$$

Po porównaniu obu wzorów uzyskuje się

$$\frac{U_1 - U_2}{R} = C\frac{dU_2}{dt}$$

i ostatecznie równanie dynamiki o postaci

$$T\frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1$$

gdzie T = RC jest stałą czasową członu.

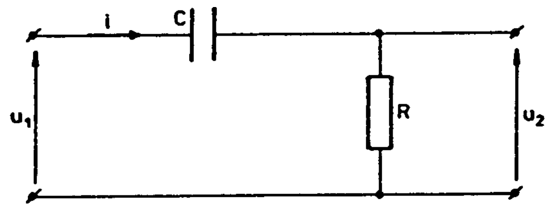
Po zastosowaniu do równania dynamiki przekształcenia Laplace'a i wyznaczeniu transmitancji otrzymuje się wyrażenie

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

CZŁON RÓŻNICZKUJĄCY

Wyróżnia się dwa rodzaje członów różniczkujących: idealny i rzeczywisty. Człon różniczkujący idealny opisany transmitancją G(s) = ks nie jest realizowalny fizycznie. W praktyce stosuje się więc połączenie szeregowe tego członu z członem inercyjnym uzyskując tak zwany człon różniczkujący rzeczywisty. Przykładem członu różniczkującego rzeczywistego jest czwórnik elektryczny CR

a) **Czwórnik elektryczny CR** – rysunek 1.7



Rys.1.7.Schemat czwórnika elektrycznego CR: C – pojemność kondensatora, i – natężenie prądu, R – rezystancja, U_1,U_2 – napięcie, U_1 – sygnałwejściowy,U_2 – sygnał wyjściowy

Po porównaniu prądu ładowania kondensatora

$$i = C\left(\frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt}\right)$$

z prądem płynącym przez rezystor R

$$i = \frac{U_2}{R}$$

otrzymuje się równanie dynamiki o postaci:

$$T\frac{dU_2}{dt} + U_2 = T\frac{dU_1}{dt}$$

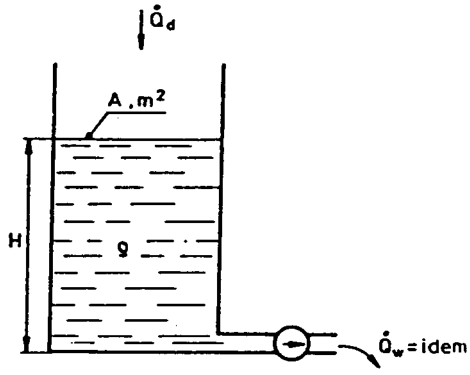
gdzie T = RC – stała czasowa.

Transmitancję operatorową można uzyskać po zastosowaniu do równania dynamiki przekształcenia Laplace'a jako

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Ts}{Ts+1} \quad .$$

CZŁON CAŁKUJĄCY

a) **Zbiornik z wypływem ustalonym (przez pompę)** – rysunek 1.8



Rys.1.8.Schemat zbiornika z wypływem ustalonym :A – powierzchnia zbiornika, H – poziom cieczy, $\dot{Q}_d$, $\dot{Q}_w$ – natężenie dopływu i wypływu, ρ - gęstość, $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_d - \dot{Q}_w$ – sygnał wejściowy, H – sygnał wyjściowy

Równanie dynamiki uzyskuje się z bilansu objętości

$$\dot{Q}_d - \dot{Q}_w = A\frac{dH}{dt} \quad , \qquad \mathrm{m^3/s} \; .$$

Ponieważ $\dot{Q}_w$ = idem, zatem $\dot{Q}_d = \dot{Q}$ i równanie dynamiki przybiera postać

$$A\frac{dH}{dt} = \dot{Q} \ ,$$

a transmitancja operatorowa uzyskana po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do równania dynamiki

$$G(s) = \frac{H(s)}{\dot{Q}(s)} = \frac{k}{s} \ ,$$

gdzie k=1/A.

b) **Siłownik hydrauliczny z suwakiem rozdzielczym** – rysunek 1.9

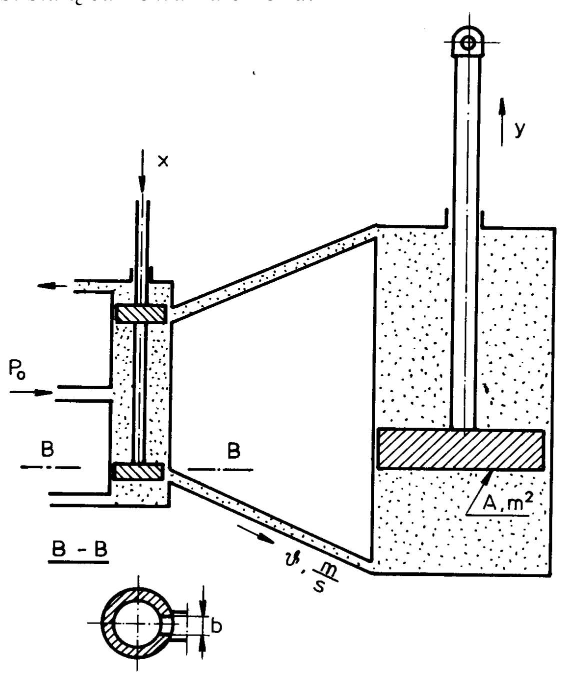
Równanie dynamiki tego elementu wynika z porównania strumienia cieczy $\dot{Q}$, która płynie przez szczelinę w suwaku i wypełnia równocześnie odpowiednią przestrzeń w siłowniku (cylinder z tłokiem). Zakładając, że prędkość strugi oleju w szczelinie v = idem, że siłownik jest nieobciążony oraz pomijając straty przepływu w kanałach i tarcie mechaniczne, można napisać równanie

$$vbx = A\frac{dy}{dt}$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do powyższego równania można wyrazić transmitancję operatorową członu wzorem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts} \ ,$$

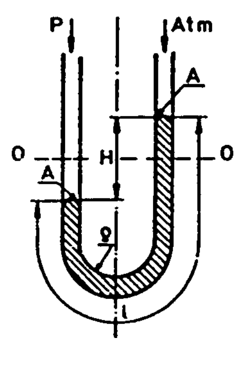
gdzie T = A/(vb) jest stałą całkowania członu.



Rys.1.9.Schemat siłownika hydraulicznego z suwakiem rozdzielczym:
A – powierzchnia tłoka, p_o – ciśnienie oleju, x, y – przesunięcie,
v – prędkość, x – sygnał wejściowy, y – sygnał wyjściowy

CZŁON OSCYLACYJNY

a) **Manometr cieczowy dwuramienny** - rysunek 1.10



Rys.1.10.Schemat manometru cieczowego: A – powierzchnia,
H – wysokość różnicy poziomów cieczy,
l – długość całego słupa cieczy,
p – ciśnienie, ρ - gęstość cieczy manometrycznej

Równanie dynamiki tego członu wynika z równowagi sił

$$F_p = F_m + F_R + F_H \ ,$$

gdzie: F_p – siła spowodowana działaniem ciśnienia (różnicy ciśnień) na zwierciadła cieczy manometrycznej,
F_m – siła bezwładności proporcjonalna do przyśpieszenia masy cieczy m. zawartej w manometrze,
F_R – siła oporu hydraulicznego proporcjonalna do prędkości przemieszczania się cieczy w manometrze,
F_H – siła hydrostatyczna słupa cieczy w manometrze
m - masa cieczy

$$pA = m\frac{d^2H}{dt^2} + R\frac{dH}{dt} + A\rho g H \ .$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$k = \frac{1}{\rho g} \ , \qquad T = \sqrt{\frac{m}{A\rho g}} \ , \qquad \xi = \frac{R}{2\sqrt{\rho g A m}} \ ,$$

równanie dynamiki manometru można zapisać w postaci:

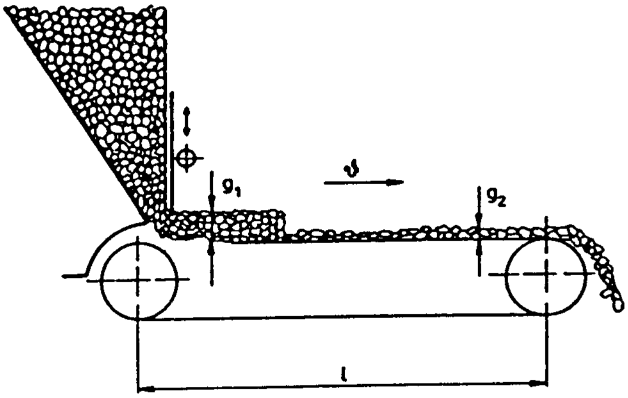
$$kp = T^2\frac{d^2H}{dt^2} + 2\xi T\frac{dH}{dt} + H \ .$$

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a równanie to prowadzi do wyrażenia określającego transmitancję operatorową członu

$$G(s) = \frac{H(s)}{p(s)} = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \ .$$

CZŁON OPÓŹNIAJĄCY

a) **Podajnik taśmowy** – rysunek 1.11



Rys.1.11.Schemat podajnika taśmowego: l – długość podajnika, v – prędkość przesuwu taśmy, g_1 – grubość warstwy na początku podajnika (sygnał wejściowy), g_2 – grubość warstwy na końcu podajnika (sygnał wyjściowy)

Grubość warstwy g_2 będzie równa grubości warstwy g_1 na początku podajnika po upływie czasu T_o, tzn.

$$g_2(t) = g_1(t - T_0),$$

gdzie:

$$T_0 = \frac{l}{v}.$$

Transmitancja operatorowa uzyskana po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do równania dynamiki ma postać:

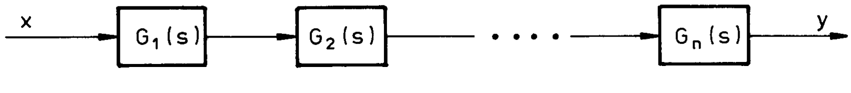
$$G(s) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)} = \exp(-sT_0).$$

1.3.Połączenia członów

Obiekty mają właściwości dynamiczne bardziej skomplikowane niż człony podstawowe. Właściwości dynamiczne obiektów można przybliżyć przez określenie właściwości dynamicznych układów będących różnymi połączeniami członów: szeregowego, równoległego i ze sprzężeniem zwrotnym.

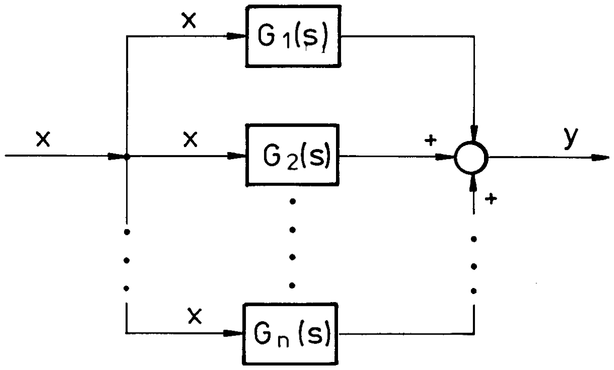
Połączenie szeregowe charakteryzuje się tym, że sygnał wyjściowy jednego członu jest sygnałem wejściowym członu następnego. Transmitancja wypadkowa G(s) układu jest iloczynem poszczególnych transmitancji.

$$Gs) = G_1(s)G_2(s)....G_n(s)$$



Rys.1.12..Połączenie szeregowe członów

Połączenie równoległe charakteryzuje się tym, że ten sam sygnał wejściowy jest doprowadzany do kilku członów, a sygnały wyjściowe tych członów są algebraicznie sumowane. Transmitancja wypadkowa G(s) układu jest sumą algebraiczną poszczególnych transmitancji.



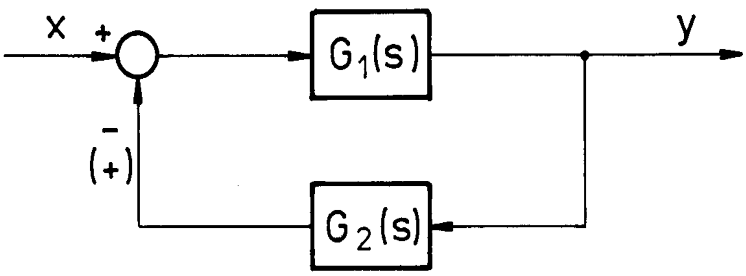
$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + ... + G_n(s)$$

Rys.1.13..Połączenie równoległe członów

Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym charakteryzuje się tym, że sygnał wyjściowy układu, bezpośrednio lub za pomocą innego członu, zostaje z powrotem wprowadzony na wejście tego układu. Jeżeli sygnał wyjściowy pochodzący od sprzężenia zwrotnego odejmie się lub doda do sygnału wejściowego, to sprzężenie takie będzie się nazywać odpowiednio ujemnym lub dodatnim. Transmitancja wypadkowa układu określona jest przez:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} \, .$$

Znak plus w mianowniku odnosi się do ujemnego sprzężenia zwrotnego, znak minus do dodatniego.



Rys.1.14.Połączenie członów w układzie ze sprzężeniem zwrotnym